$$A_{3\times3} \times \vec{X}_{3\times1} = \vec{b}_{3\times1} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Si A^{-1} existe, $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ⚠ $A_{3\times3}$, $A^{-1}_{3\times3}$, $I_{3\times3}$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Est la matrice identité, c'est l'élément neutre du produit matriciel ($\approx$ "1" multipl. scalaire)

$$I \cdot \vec{x} = \vec{x} \qquad (I_{3\times3} \times A_{3\times3} = A_{3\times3})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Si A^{-1} existe et on le connaît, on peut assez facilement résoudre

$$A^{-1} A \vec{x} = A^{-1} \vec{b}$$

$$\underbrace{A^{-1} A}_{I} \vec{x} = A^{-1} \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1} \vec{b}$$ résolu système d'équations linéaire ! (affine) Poly. Ordre 1

Comment trouver A^{-1} et aussi - est-que A^{-1} existe ???

Parallèle multipl. scalaire : $3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

$$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a} = a^{-1} \cdot b \quad \text{si } a \neq 0 \text{ !}$$

Quand est-ce que A^{-1} existe ?

1. A^{-1} n'existe QUE si la matrice est CARREE
2. A est inversible si sa transposée A^T est inversible

⚠ $A^{-1} \neq A^T$ $A = |||$ $A^T = (\equiv)$

Et si l'une des conditions suivantes est remplie, elles le seront en faite toutes :

3.1: la famille des vecteurs COLONNE de la matrice forment une famille LIBRE

$$A = \big(\underbrace{\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3}_{\text{fam. LIBRE}}\big) \qquad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$$

seul. solution à l'équ. $\alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 + \gamma \vec{a}_3 = \vec{0}$

c'est $\alpha = \beta = \gamma = 0$!

3.2 : la famille des vecteurs LIGNE de la matrice forment une famille libre !

3.3 : système d'équations linéaires $A\vec{x} = \vec{0}$ n'a qu'une et une seule solution, à savoir $\vec{x} = \vec{0}$!

PAS inversible

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.4 Le ***déterminant*** de la matrice A n'est pas 0 !

Qu'est-ce que le déterminant ??

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Si $\det(A_{2\times2}) \neq 0$ alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = 1\cdot4 - 3\cdot2 = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Inversible} \checkmark$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-2)} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}A$$

Déterminant 3x3 :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \boxed{a_{12}} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array}$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23}) - a_{12} \cdot (a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}) + \ldots$$

développement du $\det(A)$ par la $1^{ère}$ ligne !

$+ \quad - \quad +$

$$\det \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} = -0 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}}_{\det(\dots)} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 - 1(8-4) = \underline{\underline{-4}}$$

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} = a \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix}}_{f \cdot \begin{vmatrix} k & l \\ o & p \end{vmatrix} - g \begin{vmatrix} j & l \\ n & p \end{vmatrix} + h \begin{vmatrix} j & k \\ n & o \end{vmatrix}} - b \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c \dots$$

$\det(A_{2\times2}) \longrightarrow 1$ calcul $|\ |_{2\times2}$

$\det(A_{3\times3}) \longrightarrow 3$ calcul $|\ |_{2\times2}$

$\det(A_{4\times4}) \longrightarrow 4\ |\ |_{3\times3} = 12\ |\ |_{2\times2}$

$\det(A_{n\times n}) \longrightarrow n\ |\ |_{(n-1)\times(n-1)} = n \cdot (n-1)\ |\ |_{(n-2)\cdot(n-2)} \dots \frac{n!}{2}$ calculs $|\ |_{2\times2}$

$\det(A)$ $O(n!)$ TRÈS MAUVAIS !!!

$\det(A_{8\times8}) = \sim 20'160$ calculs $|\ |_{2\times2}$

$A\vec{x} = \vec{b}$ possible à résoudre ? si $\det(A) \neq 0$

$$\underbrace{A\vec{x} = \vec{b}}_{\text{Dur !}}$$

possible à résoudre ? Si $\det(A) \neq 0$

$\hookrightarrow O(n!)$ calculs à faire !

pire que $O(2^n)$!!!

Il d'autres manières de faire !!!

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & 0 & 0 & 0 & - & — \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & — & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & — & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \triangle & 0 \end{pmatrix} \quad \text{TRIANGULAIRE INFÉRIEUR}$$

$$A\vec{x} = \vec{b} \rightarrow \begin{cases} a_{11} x_1 + 0 = b_1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} = \Delta \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + 0 = b_2 \\ a_{21}\left(\dfrac{b_1}{a_{11}}\right) + a_{22} x_2 = b_2 \Rightarrow x_2 = ☆ \end{cases}$$

Donc, il nous faut "dépouiller" les valeurs des variables 1 à 1.
Il faut injecter les valeurs ligne par ligne (1 calcul par ligne) $\Rightarrow O(n)$

A chaque fois qu'on obtient une valeur, on la remplace dans les lignes suivantes (il y a au pire n lignes restantes)
=> moins que n calculs à chaque ligne

Résoudre $\begin{pmatrix} \triangle & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{b} \sim O(n^2)$ (facile !)

$\begin{pmatrix} 0 & \nabla \end{pmatrix} \cdot \vec{y} = \vec{b} \sim O(n^2)$ (facile)

Théorème : Si A est inversible, il une factorisation dite L-U, où L est une matrice triangulaire INFERIEURE (Lower), et U est une matrice triangulaire SUPERIEUR (Upper).

$L = \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ & \ddots \end{pmatrix}$ $\quad U = \begin{pmatrix} \ddots & \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$ et $A = L \cdot U$

Si A est inversible, il existe L et U triangulaires sup et inf, telles que $A = L \cdot U$

Comment résoudre $A\vec{x} = \vec{b}$?

$$L(\underbrace{U \cdot \vec{x}}_{\vec{y}}) = \vec{b}$$

(1) Résolvons $L\vec{y} = \vec{b} \Rightarrow$ facile ! $(O(n^2))$

$\vec{y} = \dots$ connu

(2) Résolvons : $U\vec{x} = \vec{y}$ on trouvera $\vec{x}$ tel que $A\vec{x} = \vec{b}$

Pourquoi ? $U\vec{x} = \vec{y}$ par l'étape (2)

$$\underbrace{L\vec{y}}_{\vec{b} \text{ étape } (1)} = LU\vec{x} = \vec{b} \quad \text{et} \quad L \cdot U = A$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Comment trouver L et U ?

Méthode du pivot de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) Accoler une matrice Identité à GAUCHE

$$(I|A) = \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{matrix}\right) \quad l_2 \to l_2 - l_1$$

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \quad 0 \end{matrix}$$

(2) Eliminer par opération sur les lignes les coefficients du triangle INFERIEUR

$$\begin{matrix} -(-1) \\ -(+3) \end{matrix} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ +1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & \underline{\underline{5}} & -1 \end{matrix}\right) \quad \begin{matrix} -l_1 = (-1) \cdot l_1 \\ +3 l_1 \end{matrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +1 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}}_{U} \quad l_3 + \frac{5}{3} l_2 \qquad O(n^2) \text{ par trav. } L \text{ et } U$$

FINI

Résoudre $A\vec{x} = \vec{b}$

1) Trouver L et U $(O(n^3))$

2) Calculer sol. $L\vec{y} = \vec{b}$ $(O(n^2))$

3) Calculer sol. $U\vec{x} = \vec{y}$ $(O(n^2))$

$3 \cdot O(n^2) \approx O(n^2)$

Factorisation L-U de A par le pivot de Gauss

Donné A (carrée) $\longmapsto$ L et U $A = L \cdot U$

1) Augmenter la matrice $A_{n\times n}$

$$\left(I_{n\times n} \middle| A\right) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{11} & a_{12} & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & a_{21} & \boxed{a_{22}} & \cdots \\ 0 & \boxed{0} & 1 & \cdots & \vdots & \vdots & \end{array}\right)$$

$-q_{ij}$

2) Pour (i =1,….,n) => mettre à 0 TOUS les coefficients de la ligne i+1, i+2, …. N
Dans la colonne i !!!

"recopier" avec signe "−" à ligne j colonne i

On cherche le coefficent q_{ij} tel que $\ell_i + q_{ij}\,\ell_j = 0$ à la ligne j

$i = 2$ $\boxed{a_{22}}$

$j = 3$ a_{32} → mettre à 0

"copier"

$$q_{23} = -\frac{a_{32}}{a_{22}}$$

et pour TOUTE la ligne on fait

$$\ell_3 \leftarrow \ell_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}}\,\ell_2$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \text{—} \\ 0 & a_{22} & \text{—} \\ 0 & 0 & \\ 0 & & \end{matrix}$$

$0 - \frac{a_{32}}{a_{22}} \cdot 0$